Karlsruhe Institute of Technology

Visualisierung hyperbolischer Kachelungen

Jakob von Raumer | November 12, 2015

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

Eschers Kunst

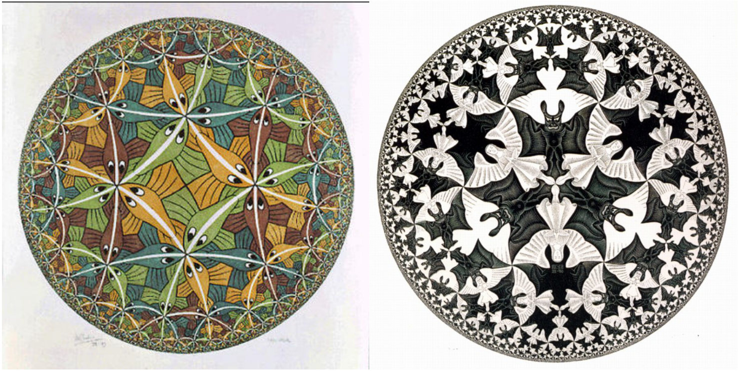


Figure : "'Circle Limit III"' und "'Circle Limit IV"' von M. C. Escher, 1959 und 1960

Eschers Kunst

- Eschers Werke waren inspiriert von Illustrationen in einem Buch von Coxeter
- Verwendete Holzschnitte zur Vervielfältigung der Kacheln
- Escher an seinen Sohn George:

> *I had an enthusiastic letter from Coxeter about my colored fish, which I sent him. Three pages of explanation of what I actually did ... . It's a pity that I understand nothing, absolutely nothing of it.*

Ziele

- Theoretische Grundlagen von hyperbolischen Kachelungen dokumentieren
- Geeignete Kacheln erstellen
- Algorithmen zum Replizieren von Kacheln implementieren

Vergleich: Euklidische und hyperbolische Geometrie

Euklidisch

- Für eine Gerade g gibt es *genau* eine zu g parallele Gerade durch einen Punkt $p \notin g$.
- Ein Dreieck hat eine Innenwinkelsumme von π.

Hyperbolisch

- Für eine Gerade g gibt es *mehr als* eine zu g parallele Gerade durch einen Punkt $p \notin g$.
- Ein Dreieck hat eine Innenwinkelsumme $< \pi$.

Vergleich: Euklidische und hyperbolische Geometrie

Länge eines Weges $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$:

Euklidisch

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t$$

Hyperbolisch

$$L(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} \, \mathrm{d}t$$

Abstand zweier Punkte $a, b \in \mathbb{H}$ ist die Länge des kürzeste Weges zwischen ihnen.

Euklidisch

$$d(a,b) = |b - a|$$

Hyperbolisch

$$d(a,b) = \ln \frac{|a - \bar{b}| + |a - b|}{|a - \bar{b}| - |a - b|}$$

Geodätische auf der oberen Halbebene

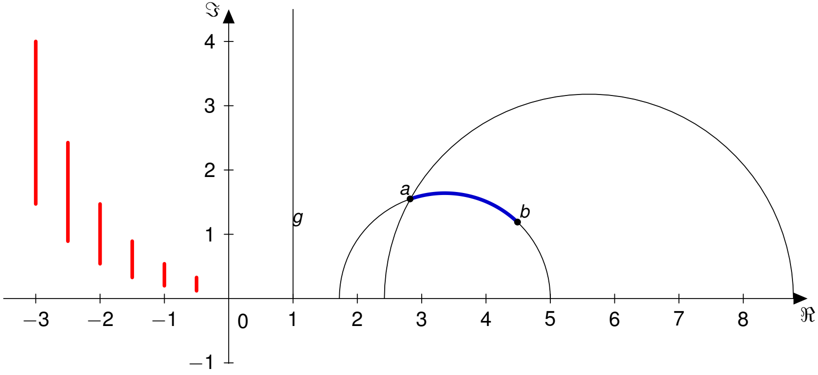


Figure : Geodätische und Strecken auf der oberen Halbebene.

Von der oberen Halbebene zur Poincaré-Kreisscheibe

Die stetige Abb. $f : \mathbb{H} \to \mathbb{U} : z \mapsto \frac{zi+1}{z+i}$ gibt uns eine beschränkte Darstellung von $\mathbb{H}$.

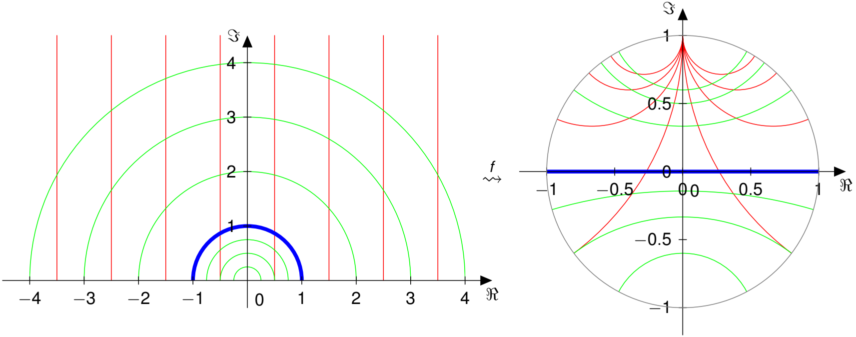


Figure : Geodätische auf der oberen Halbene und ihre Entsprechung auf der Poincaré-Kreisscheibe.

Das Klein-Beltrami-Modell

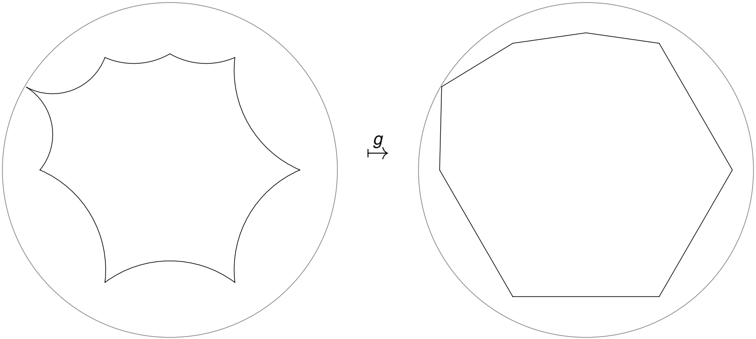


Figure : Ein Polygon, dargestellt in der Poincaré-Kreisscheibe und im Klein-Beltrami-Modell

Isometrien auf $\mathbb{H}$

Satz

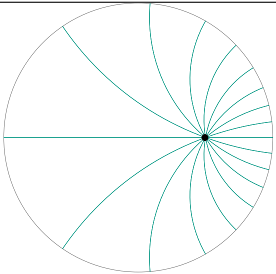
Die Isometrien von $\mathbb{H}$ sind als Gruppe isomorph zu $PS^*L(2,\mathbb{R}) := S^*L(2,\mathbb{R})/\{\pm I_2\}$.
Die orientierungserhaltenden Isometrien auf $\mathbb{H}$ sind als Gruppe isomorph zu $PSL(2,\mathbb{R}) := SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I_2\}$.

$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in PSL(2,\mathbb{R})$ entspricht der *Möbiustransformation* $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$

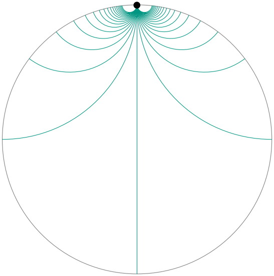
Beispiele:

- Verschiebung $z \mapsto z+1$
- Streckung $z \mapsto 2z$
- Drehung $z \mapsto -\frac{1}{z}$

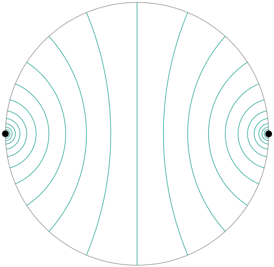
3 Typen von Transformationen

$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist	Spur	Fixpunkte	Grafik
elliptisch	$\|a+d\| < 2$	Einer in $\mathbb{H}$	
parabolisch	$\|a+d\| = 2$	Einer im unendlichen	
hyperbolisch	$\|a+d\| > 2$	Zwei im unendlichen	

3 Typen von Transformationen

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist	Spur	Fixpunkte	Grafik
elliptisch	$\lvert a+d \rvert < 2$	Einer in $\mathbb{H}$	
parabolisch	$\lvert a+d \rvert = 2$	Einer im unendlichen	
hyperbolisch	$\lvert a+d \rvert > 2$	Zwei im unendlichen	

3 Typen von Transformationen

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist	Spur	Fixpunkte	Grafik
elliptisch	$\lvert a+d \rvert < 2$	Einer in $\mathbb{H}$	
parabolisch	$\lvert a+d \rvert = 2$	Einer im unendlichen	
hyperbolisch	$\lvert a+d \rvert > 2$	Zwei im unendlichen	

Fuchssche und Kleinsche Gruppen

- Eine diskrete Untergruppe Γ von $PS^*L(2, \mathbb{R})$, heißt *Kleinsche Gruppe*.
- Ist zusätzlich $\Gamma \leq PSL(2, \mathbb{R})$, so heißt Γ *Fuchssche Gruppe*.

Fundamentalbereiche

Karlsruhe Institute of Technology

Definition

Eine abgeschlossene Teilmenge $F \subseteq \mathbb{H}$ heißt *Fundamentalbereich* von Γ, falls gilt:

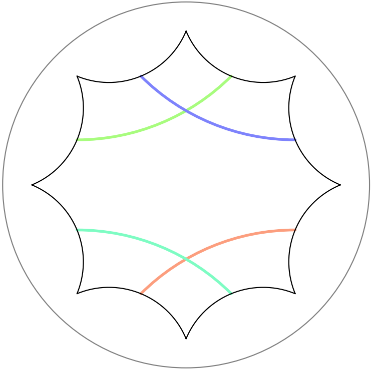
- $\Gamma \cdot F := \bigcup_{T \in \Gamma} T(F) = \mathbb{H}$.
- Für alle $T \in \Gamma$ schneiden sich F und $T(F)$ höchstens im Rand.

Ist F ein Fundamentalbereich von Γ, dann heißt $\{T(F) \mid T \in \Gamma\}$ *Kachelung*.

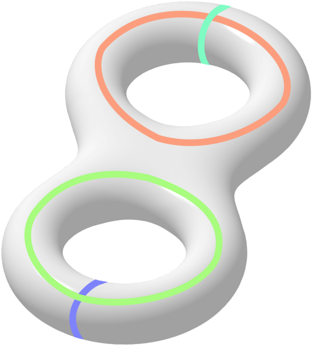
Fuchssche Gruppen: Elliptische und parabolische Untergruppen

- *Elliptische Untergruppe*: $\langle T \rangle \leq \Gamma$ mit T elliptisch
- *Parabolische Untergruppe*: $\langle T \rangle \leq \Gamma$ mit T parabolisch
- Zueinander konjugierte, maximale elliptische oder parabolische Untergruppen haben die selbe Ordnung. Diese heißt *Periode* von Γ

Der Bahnenraum einer Fuchsschen Gruppe



$\rightsquigarrow$



Die Signatur einer Fuchsschen Gruppe

Karlsruhe Institute of Technology

Definition

Sei Γ eine Fuchssche Gruppe mit Perioden $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $m_1 \leq \ldots \leq m_n$ und Geschlecht $g \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt der Vektor $(g, m_1, \ldots, m_n)$ die *Signatur* von Γ.

Funktionsumfang des Programms

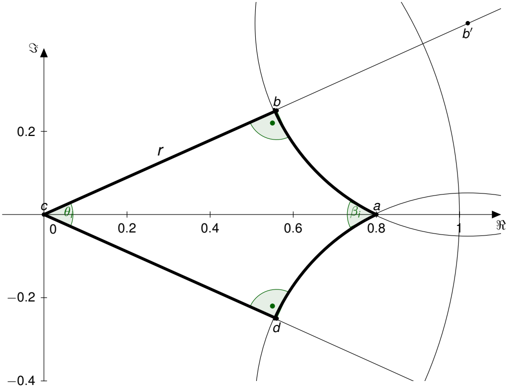
Das Programm soll Kachelungen erzeugen, die

- von einer Fuchsschen Gruppe mit gegebener Signatur induziert werden oder
- aus Polygonen mit einer gegebenen Folge von Innenwinkeln $\frac{2\pi}{m_i}$ besteht.

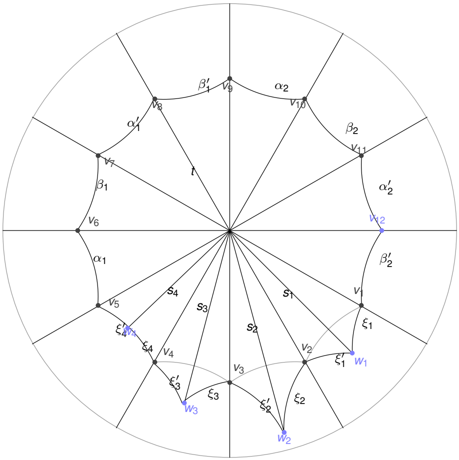
Polygone zur Kachelung durch Spiegelungen

- $\beta_i = \frac{2\pi}{m_i}$
- $\lim_{r\to 0} \theta_i = \pi$
- $\lim_{r\to 1} \theta_i = 0$

$\Rightarrow$ Finde $r_0 \in (0,1)$ sodass $\sum_{i+0}^{n} \theta_i = 2\pi$.



Polygone zur Kachelung durch Fuchssche Gruppen



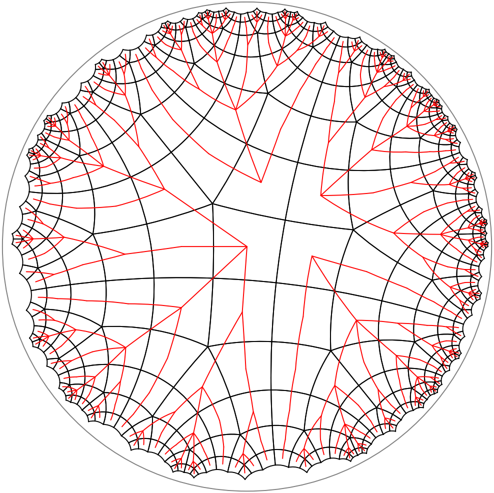
Replizierungs-Algorithmus von Dunham

- Basiert auf einer Tiefensuche.
- Ein "‘kombinatorischer"’ Algorithmus: Vorgehen hängt nur von den Eckenvalenzen des Polygons ab.

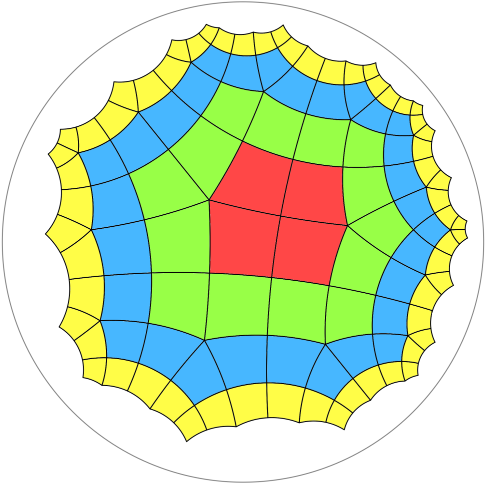
Der Algorithmus kann beliebige Polygone replizieren, außer:

- Wenn der zu vervielfältigende Fundamentalbereich dreieckig ist,
- oder wenn eine Ecke eine Valenz von 3 hat.

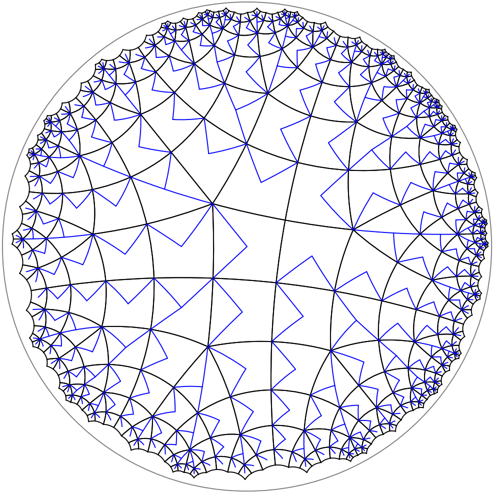
Suchbäume des Dunham-Algorithmus



Aufteilung der Kachelung in Ebenen



Suchbäume des Dunham-Algorithmus



Kachelung mittels Priority Queue

Karlsruhe Institute of Technology

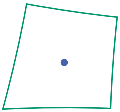
Grundsätzliches Vorgehen:

- Transformiere jede Kachel mit den Transformationen, die auf kantenadjazente Kacheln abbilden
- Verwerfe schon getroffene Kacheln

Kachelung mittels Priority Queue

Drei Datenstrukturen:

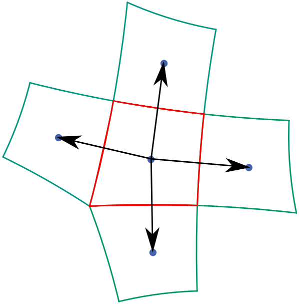
- Liste `inactivePolys`: Schon expandierte Polygone
- Prioritätsliste `activePolys`: Zu expandierende Polygone
- Hash-Menge `midpoints`: Schon getroffene Mittelpunkte



Kachelung mittels Priority Queue

Drei Datenstrukturen:

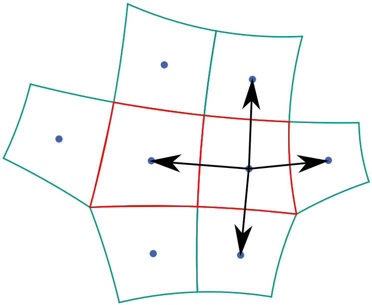
- Liste `inactivePolys`: Schon expandierte Polygone
- Prioritätsliste `activePolys`: Zu expandierende Polygone
- Hash-Menge `midpoints`: Schon getroffene Mittelpunkte



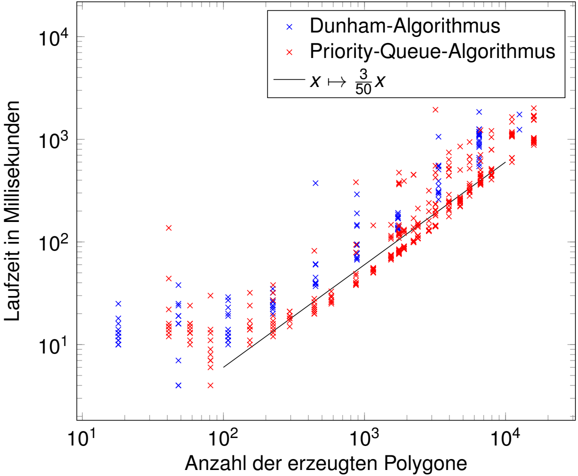
Kachelung mittels Priority Queue

Drei Datenstrukturen:

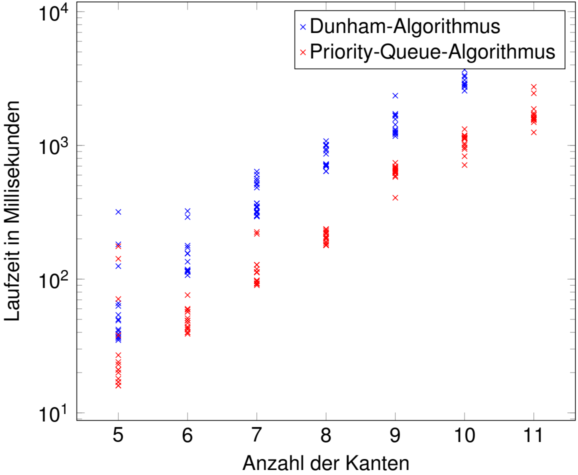
- Liste `inactivePolys`: Schon expandierte Polygone
- Prioritätsliste `activePolys`: Zu expandierende Polygone
- Hash-Menge `midpoints`: Schon getroffene Mittelpunkte



Laufzeitvergleich



Laufzeitvergleich



Ausblick

Offene Fragen und Aufgaben sind:

- Auflösung der Einschränkungen des Dunham-Algorithmus
- Optimierung der Approximationsverfahren beim Erstellen der Basispolygone
- Auf das Basispolygon gelegte Vektorgrafik replizieren